बीजीय: व्यञ्जक:

अध्याय: 12

12.1 भूमिका

वयम् $x+3$, $y-5$, $4x+5$, $10y-5$ इत्यादीभिः सरल-बीजीय-व्यञ्जकैः सह परिचिताः स्मः । वयं षष्ठ्यां कक्ष्यायाम् अध्ययनं कृतवन्तः स्मः यत् इमे व्यञ्जकाः कथं प्रहेलिकानाम् अथवा समस्यानाम् एकेन सुव्यवस्थितेन प्रकारेण प्रस्तुतीकरणे साहाय्यं कुर्वन्ति । अस्माभिः सरल-समीकरणम् इत्यस्मिन् अध्याये अपि व्यञ्जकैः सम्बद्धानि अनेकानि उदाहरणानि दृष्टानि ।

बीजगणिते व्यञ्जकाः (expressions) एका केन्द्रीया अवधारणा इति मन्यन्ते । एषः अध्यायः बीजीय-व्यञ्जकैः सम्बन्धितः अस्ति । यदा भवन्तः अस्य अध्यायस्य अध्ययनं कृतवन्तः भविष्यन्ति तदा ज्ञास्यन्ति यत् केन प्रकारेण बीजीय-व्यञ्जकानां निर्माणं भवति कथं च तेषां संयोजनं क्रियते, एतेषां मानानि कथं ज्ञातुं शक्नुमः अथ च केन प्रकारेण एतेषाम् उपयोगः कर्तुं शक्यते ।

12.2 व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते ?

सम्प्रति वयं सम्यक् प्रकारेण जानीमः यत् कश्चन चरः (variable) किं भवति ? वयं चरान् व्यक्तीकर्तुम् x, y, l, m, ... इत्यादीनाम् अक्षराणां प्रयोगं कुर्मः । कस्यचित् चरस्य विभिन्नानि मानानि भवितुम् अर्हन्ति । अस्य मानम् निश्चितं न भवति । अपरतः अचरस्य (constant) एकं निश्चितं मानं भवति । 4, 100, –17 इत्यादीनि अचराणाम् उदाहरणानि सन्ति ।

वयं चरान् अचरान् च (चराचरान्) संयोज्य बीजीय-व्यञ्जकानां निर्माणं कुर्मः । एतदर्थं वयं योगः, व्यवकलनं, गुणनं विभाजनं च इति सङ्क्रियाणां प्रयोगं कुर्मः । वयम् $4x+5$, $10y-20$ सदृशान् व्यवञ्जकान् पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः । $4x+5$ इति व्यञ्जकः x इत्यस्य चरस्य प्रयोगेण निर्मितः अस्ति । अस्मिन् प्रथमम् x इति चरम् 4 इति अचरेण गुणयित्वा तत्पश्चाद् अस्मिन् गुणनफले पञ्च (5) इति अचरं योजयित्वा प्राप्यते । अनेन एव प्रकारेण $10y-20$ इति व्यञ्जकः प्रथमम् y इति चरं 10 इति अचरेण गुणयित्वा पुनश्च गुणनफलात् विंशतिम् (20) व्यवकलय्य प्राप्यते ।

उपर्युक्ताः व्यञ्जकाः चरान् अचरान् च संयोज्य प्राप्ताः । वयं व्यञ्जकान् चरान् च तैः एव चरैः अथवा अन्यचरैः संयोज्य अपि प्राप्तुम् शक्नुमः।

पश्यन्तु यत् निम्नलिखिताः व्यञ्जकाः केन प्रकारेण प्राप्यन्ते ?

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2-5,\ xy,\ 4xy+7$$

(i) x^2 इति व्यञ्जकः x इत्येतं चरम् x इत्यनेन एव चरेण गुणयित्वा प्राप्यते ।

अर्थात् $x \times x = x^2$ इति अस्ति ।

येन प्रकारेण4 × 4= 4^2 इति लिख्यते तेन एव प्रकारेण वयम् x × x= x^2 इति लिखामः। 'x' इति सामान्यतः 'x इत्यस्य वर्गः' इति रूपेण पठ्यते।

(यदा भवन्तः 'घाताङ्कः घातः च' इति अध्याये अध्ययनं करिष्यन्ति तदा भवन्तः अनुभविष्यन्ति यत् x^2 इति x इत्यस्य उपरि घातद्वयम् इति रूपेण अपि पठितुं शक्यते।) अनेन प्रकारेण वयम् $x \times x \times x = x^3$ इति लेखितुं शक्नुमः।

सामान्यतः x^3 इति x इत्यस्य घनः ('x cubed') इति अपि पठितुं शक्यते। भवन्तः एतद् अनुभविष्यन्ति यत् x^3 इति x इत्यस्य उपरि घनत्रयम् इति अपि पठितुं शक्यते।

$x, x^2, x^3, \ldots$ इत्यादिषु प्रत्येकम् x इत्यस्माद् प्राप्तः एकः बीजीयः व्यञ्जकः अस्ति।

(ii) $2y^2$ इति व्यञ्जकः y इत्यस्माद् व्यञ्जकात् $2y^2 = 2 \times y \times y$ इत्यनेन प्रकारेण प्राप्तुं शक्यते। अत्र वयम् y इति व्यञ्जकं y इति व्यञ्जकेन गुणयित्वा y^2 इति व्यञ्जकं प्राप्नुमः तत्पश्चात् एतत् y^2 गुणनफलम् 2 इत्यनेन गुणयामः।

(iii) $(3x^2 - 5)$ इत्यत्र वयं प्रथमं x^2 इति प्राप्नुमः पुनश्च तत् 3 इत्यनेन गुणयित्वा $3x^2$ इति प्राप्नुमः। अन्ते $3x^2 - 5$ इति प्राप्तुं वयम् $3x^2$ इत्यस्मात् पञ्च व्यवकलयामः।

एतान् कुर्वन्तु

ज्ञापयन्तु यत् निम्नलिखित-व्यञ्जकानां प्राप्तिः कथं भवति :

$7xy+5,\ x^2 y,\ 4x^2-5x$

(iv) xy, इत्यत्र वयम् x इति चरं केनचिद् अन्येन y इति चरेण गुणयामः। अनेन प्रकारेण $x \times y = xy$ इति जायते।

(v) $4xy + 7$ इत्यत्र सर्वप्रथमं वयम् xy इति प्राप्नुमः तत्पश्चात् तत् 4 द्वारा गुणीकृत्य 4xy इति प्राप्नुमः तदन्तरं दत्तं व्यञ्जकं प्राप्तुम् 7 इति अचरम् 4xy इति चरेण सह योजयामः।

12.3 कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदानि

अधुना पर्यन्तम् अस्माभिः पठितं यत् व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते। अधुना वयं तत् सुव्यवस्थितरूपेण स्थापयिष्यामः। एतत् कार्यं कर्तुम् अस्माकं कृते एतद् अपेक्षितं वर्तते यत् कस्यचिद् व्यञ्जकस्य पदानि (terms) तथा च तेषां गुणनखण्डाः (factors) के भवन्ति अर्थात् तेषाम् अर्थाः के सन्ति इति ज्ञातव्यम्।

$(4x + 5)$ इति व्यञ्जकस्य विषये विचारयन्तु। अस्य व्यञ्जकस्य निर्माणाय सर्वप्रथमं वयं 4 तथा च x इत्येतौ पृथक्तया गुणयित्वा 4x इति निर्मीतवन्तः तदनन्तरम् अस्मिन् 5 इति योजितवन्तः आस्म। अनेन प्रकारेण $(3x^2 + 7y)$ इति व्यञ्जकं विचारयन्तु। अत्र वयं सर्वप्रथमं पृथक्तया 3, x तथा च x इत्येतानि गुणयित्वा $3x^2$ इति निर्मीतवन्तः। पुनः वयं पृथक्तया 7 तथा च y इत्येतौ गुणयित्वा 7y इति निर्मितवन्तः आस्म। $3x^2$ तथा च 7y इत्येतयोः निर्माणान्तरं वयं प्रदत्त-व्यञ्जकस्य प्राप्त्यर्थम् एते योजितवन्तः ।

भवन्तः प्राप्स्यन्ति यत् वयं यावतः अपि व्यञ्जकान् आधारीकृत्य कार्यं कुर्मः ते सर्वे अपि अस्मिन् रूपे द्रष्टुं शक्यन्ते। एतेषां भागाः भवन्ति ये पृथक्तया निर्मीयन्ते पुनश्च योज्यन्ते। व्यञ्जकानाम् एतादृशाः भागाः ये पूर्वं पृथक्तया निर्मीयन्ते पुनश्च योज्यन्ते कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदम् इति उच्यते। $(4x^2 - 3xy)$ इति व्यञ्जकं पश्यन्तु। वयं वदामः यत् अस्य द्वे पदे $4x^2$ तथा च $-3xy$ इति स्तः। $4x^2$ इति पदम् 4, x तथा च x इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति अथ च $-3xy$ इति पदं -3 , x तथा च y इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति।

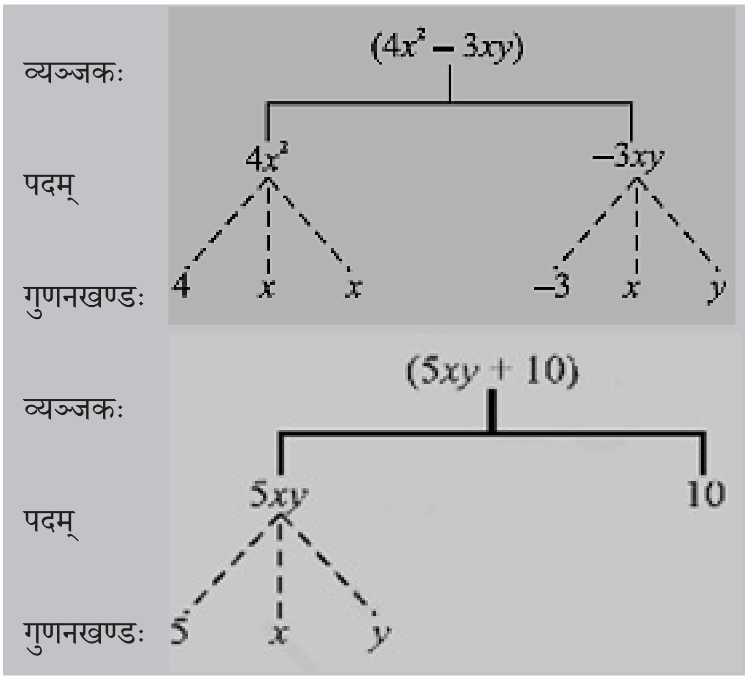
व्यञ्जक-निर्माणाय पदानि योज्यन्ते। येन प्रकारेण $(4x + 5)$ इति व्यञ्जकं निर्मातुं 4x तथा च 5 इति पदद्वयं योज्यते तेन एव प्रकारेण $(4x^2 - 3xy)$ इति व्यञ्जकं निर्मातुं $4x^2$ तथा च $(-3xy)$ इति पदद्वयं योज्यते। अस्य कारणम् $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$ इति भवति।

अवधानं यच्छन्तु यत् पदे ऋणचिह्नम् (–) सम्मिलितं भवति। $4x^2–3xy$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके अस्माभिः $3xy$ पदं न स्वीकृत्य ($–3xy$) इति स्वीकृतम् आसीत्। अतः अस्य कथनस्य आवश्यकता एव नास्ति यत् कमपि व्यञ्जकं निर्मातुं पदानि समाकल्यन्ते व्यवकल्यन्ते वा। एतदर्थम् एतत् कथनम् एव पर्याप्तम् अस्ति यत् पदानां योजनं क्रियते।

कस्यचित् पदस्य गुणनखण्डाः

अस्माभिः उपरि दृष्टम् आसीत् यत् ($4x^2– 3xy$) इति व्यञ्जकस्य $4x^2$ एवञ्च $–3xy$ इति द्वे पदे स्तः। $4x^2$ इति पदं 4, x तथा च x इत्येतेषां गुणनफलम् अस्ति। वयं वदामः यत् 4, x तथा च x इति पदानि $4x^2$ इत्यस्य (factors) गुणनखण्डाः सन्ति। एकपदं स्वगुणनखण्डानाम् एकं गुणनफलं भवति। $3xy$ इति पदम् –3, x तथा च y इत्येतेषाम् एकं गुणनफलम् अस्ति।

वयं कस्यचित् व्यञ्जकस्य पदानि पदानां च गुणनखण्डान् एकेन सरलाकर्षकेण प्रकारेण व्यञ्जक-वृक्षारेखद्वारा (tree diagram) निरूपयितुं शक्नुमः। ($4x^2–3xy$)इत्यस्य व्यञ्जकस्य वृक्षारेखः संलग्नाकृतौ प्रदर्शितः वर्तते।



अवधानं यच्छन्तु यत् वृक्षारेखे वयं गुणनखण्डानां कृते बिन्द्वङ्कित-रेखाणां प्रयोगं कृतवन्तः तथा च पदानां कृते सतत-रेखाणां प्रयोगं कृतवन्तः। एतेषां मिश्रणं न भवेत् इति एतदर्थम् एवं कृतम्।

आयान्तु $5xy + 10$ इति व्यञ्जकस्य वृक्षारेखाम् आलिखाम। एतादृशान् गुणनखण्डान् लिखन्तु येषाम् अग्रे गुणनखण्डाः न भवितुं शक्नुयुः। अनेन प्रकारेण वयम् $5xy$ इत्येतम् $5 \times xy$ इत्यनेन रूपेण नैव लिखामः यतोहि xy इत्यस्य इतोऽपि गुणनखण्डाः भवितुम् अर्हन्ति। अनेन एव प्रकारेण यदि x^3 इति एकं पदम् अस्ति तदा एतत् $x{\times}x^2$ इति न लिखित्वा $x{\times}x \times x$ इति लिखन्तु। सहैव एतद् अपि स्मरणं भवेत् यत् एकं (1) पृथक्तया गुणनखण्डरूपेण नैव स्वीक्रियते।

एतान् कुर्वन्तु

1. निम्नलिखितेषु व्यञ्जकेषु कतमानि पदानि सन्ति ? दर्शयन्तु यत् ते व्यञ्जकाः कथं निर्मीयन्ते। प्रत्येकं व्यञ्जकस्य एकं वृक्षारेखमपि आलिखन्तु।
   $8y + 3x^2$, $7mn – 4$, $2x^2 y$
2. एतादृशान् त्रीन् व्यञ्जकान् लिखन्तु येषु प्रत्येकस्मिन् चत्वारि पदानि स्युः।

गुणाङ्कः

अस्माभिः कस्यचित् पदस्य लेखनं तदीय-गुणनखण्डानां गुणनफलरूपेण अधिगतम्। एषु कश्चन गुणनखण्डः सङ्ख्यात्मकः (numerical) भवितुम् अर्हति। तथा च अन्ये बीजीय-गुणनखण्डाः (algebra_ ic) भवितुं शक्नुवन्ति (अर्थात् एतेषु चराः भवन्ति)। अयं सङ्ख्यात्मक-गुणनखण्डः पदस्य सङ्ख्यात्मक-

गुणाङ्कः अथवा केवलमात्रं गुणाङ्कः इति कथ्यते। अयं शेषपदस्य (यः स्पष्टरूपेण बीजीय-गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति) गुणाङ्कः अपि कथ्यते। अनेन प्रकारेण 5 xy इत्यस्मिन् पदे xy इत्यस्य गुणाङ्कः 5 इति अस्ति। अनेन एव प्रकारेण $10xyz$ इत्यस्मिन् पदे xyz इत्यस्य गुणाङ्कः 10 इति अस्ति तथा च $-7x^2\,y^2$ इत्यस्मिन् पदे $x^2\,y^2$ इत्येतयोः गुणाङ्कः -7 इति अस्ति।

यदा कस्यचित् पदस्य गुणाङ्कः +1 इति भवति तदा प्रायशः लेखनसमये सः त्यज्यते। उदारणार्थम् $1x$ इति गुणनखण्डः x इति रूपेण लिख्यते एवञ्च 1, $x^2\,y^2$ इति $x^2\,y^2$ इति रूपेण लिख्यते। सार्धमेव (–1) इति गुणाङ्कः केवलम् ऋणचिह्नेन (–) प्रदर्श्यते। अनेन प्रकारेण $(-1)\,x$ इत्येतत् $-\,x$ इति रूपेण लिख्यते, $(-1)x^2\,y^2$ इत्येतत् $x^2\,y^2$ इति रूपेण लिख्यते।

कदाचित् गुणाङ्क-शब्दस्य प्रयोगः व्यापकरूपेण क्रियते। अस्मिन् रूपे वयं कथयामः यत् $5xy$ इत्यस्मिन् पदे xy इत्येतयोः गुणाङ्कः 5 इति अस्ति, $5y$ इत्यस्य x इति गुणाङ्कः अस्ति एवञ्च$5x$ इत्यस्य गुणाङ्कः y इति अस्ति। 10 xy^2 इत्यस्मिन् xy^2 इत्यस्य गुणाङ्कः 10 इति अस्ति, $10y^2$ इत्यस्य गुणाङ्कः x इति अस्ति $10x$ इत्यस्य गुणाङ्कः y^2 इति अस्ति। अनेन प्रकारेण अस्माद् अधिकेन व्यापकरूपेण गुणाङ्कः कश्चन सङ्ख्यात्मक-गुणनखण्डः भवितुम् अर्हति। अथवा कश्चन बीजीय-गुणनखण्डः भवितुम् अर्हति अथवा द्वयोः तथा च ततः अधिकानां गुणनखण्डानां गुणनफलम् अपि भवितुम् अर्हति। अयं शेष-गुणनखण्डानां गुणनफलस्य गुणाङ्कः इति कथ्यते।

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखितव्यञ्जक-पदानां गुणाङ्कान् परिचिनुत

$4x - 3y,\ a + b + 5,$

$2y + 5,\ 2xy$

उदाहरणम् 1 निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु तेषां पदानां चयनं कुर्वन्तु यानि अचराणि न सन्ति। तेषां सङ्ख्यात्मक-गुणनाङ्कान् अपि लिखन्तु -

$xy + 4,\ 13 - y^2,\ 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$

समाधानम्

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकाः	पदानि (यानि अचराणि न सन्ति)	सङ्ख्यात्मक-गुणनाङ्काः
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-\,y^2$	–1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	–1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-\,3pq^2$	4 –3

उदाहरणम् 2

(a) निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु x इत्यस्य गुणाङ्काः के सन्ति ?

$4x- 3y,\ 8 - x + y, y^2x - y,\ 2z - 5xz$

(b) निम्नलिखितेषु व्यञ्जकेषु y इत्यस्य गुणाङ्काः के सन्ति ?

$4x - 3y,\ 8 + yz,\ yz^2 + 5, my + m$

समाधानम्

प्रत्येकस्मिन् व्यञ्जके वयम् x इति गुणनखण्डयुतं पदं पश्यामः। तस्य पदस्य शेषभागः x इत्यस्य वाञ्छित-गुणाङ्कः भविष्यति।

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकः	x इति गुणनखण्डयुतं पदम्	x इत्यस्य गुणाङ्कः
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) अस्य विधिः उपर्युक्तस्य (a) इत्यस्य विधिः इव एव अस्ति।

क्रमसङ्ख्या	व्यञ्जकः	Y इति गुणनखण्डयुतं पदम्	y इत्यस्य गुणाङ्कः
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 समानं तथा च असमानम्

यदा पदानां बीजीय-गुणनखण्डाः एकसमानाः स्युः तदा तानि पदानि समानपदानि (like terms) इति कथ्यन्ते। यदा पदानां बीजीय-गुणनखण्डाः भिन्नाः स्युः तदा तानि पदानि असमान-पदानि (unlike terms) इति कथ्यन्ते। उदाहरणार्थम् $2xy - 3x + 5xy - 4$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके $2xy$ तथा च $5xy$ इति पदे पश्यत। $2xy$- इत्यस्य 2, x तथा च y इति गुणनखण्डाः सन्ति। $5xy$ इत्यस्य 5x तथा च y इति गुणनखण्डाः सन्ति। अनेन प्रकारेण एतेषां बीजीय-गुणनखण्डाः (अर्थात् ते येषु चराः सन्ति) एकाः एव सन्ति अतः इमानि समानपदानि सन्ति। एतद्-विपरीतं $2xy$ तथा च $-3x$ इत्येतयोः पदयोः भिन्नाः बीजीय-गुणनखण्डाः सन्ति। एते असमानपदे स्तः। अनेन प्रकारेण $2xy$ तथाच 4 इति असमानपदे स्तः। सार्धमेव $-3x$ तथा च 4 इति अपि असमानपदे स्तः।

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखितेषु समानपदानां समूहान् कुर्वन्तु -
$12x, 12, -25x, -25,$
$-25y, 1, x, 12y, y$

12.5 एकपदी, द्विपदं, त्रिपदं बहुपदं च

सः बीजीय-व्ञ्जकः यस्मिन् केवलम् एकमेव पदं भवेत् **एकपदी** (monomial) इति कथ्यते यथा $7xy$, $-5m$, $3z^2$, 4 इत्यादि।

सः व्यञ्जकः यस्मिन् केवलं द्वे पदे स्याताम् तथा च ते असमानपदे भवेतां सः व्यञ्जकः द्विपदी (bi_nomial) इति कथ्यते। उदाहरणार्थम् $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, $a^2 - b^2$ इति द्विपद-व्यञ्जकाः सन्ति। $10pq$ इति व्यञ्जकः एकः द्विपदव्यञ्जकः नास्ति। अयम् एकपदी अस्ति। $(a + b + 5)$ इति व्यञ्जकः एकः द्विपदव्यञ्जकः नास्ति। अस्मिन् त्रीणि पदानि सन्ति। सः व्यञ्जकः यस्मिन् त्रीणि पदानि स्युः सः त्रिपदी (trinomial) इति उच्यते। उदाहरणार्थम् $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ इति त्रिपद-व्यञ्जकाः सन्ति। किन्तु $ab + a + b + 5$ इति व्यञ्जकः त्रिपदी नास्ति यतः अस्मिन् त्रीणि न

एतान् कुर्वन्तु

निम्नलिखित-व्यञ्जकानां एकपदी,द्विपदी तथा च बहुपदी इत्यादिषु रूपेषु वर्गीकरणं कुर्वन्तु -
a,a + b,ab + a + b,ab + a + b – 5, xy,xy + 5, 5x2 – x + 2, 4pq – 3q + 5p, 7, 4m – 7n + 10, 4mn + 7.

अपितु चत्वारि पदानि सन्ति। $x + y + 5x$ इति व्यञ्जकः कश्चन त्रिपदी नास्ति यतोहि x तथा च 5x इति पदे समानपदे स्तः। व्यापकरूपेण एकः अथवा एकाधिक-पदैः युतः व्यञ्जकः बहुपदी व्यञ्जकः (polynomial) इति कथ्यते। अनेन प्रकारेण एकपदी,द्विपदी तथा च त्रिपदी व्यञ्जकः अपि बहुपदी-व्यञ्जकः अस्ति।

उदाहरणम् 3 सकारणं ज्ञापयन्तु यत् पदानां निम्नलिखित-युग्मेषु कतमाः युग्माः समानपदानां तथा च कतमाः युग्माः असमानपदानां सन्ति -

(i) 7x, 12y (ii) 15x, –21x (iii) – 4ab, 7ba (iv) 3xy, 3x
(v) $6xy^2$, $9x^2y$ (vi) pq^2, $-4pq^2$ (vii) mn^2, 10mn

समाधानम्

क्रम सङ्ख्या	युग्माः	गुणनखण्डाः	बीजीय-गुणनखण्डाः समानाः सन्ति अथवा भिन्नाः सन्ति	समानम्/ असमानपदम्	टिप्पणी
(i)	7x 12y	7,x 12,y	भिन्नः	असमानम्	पदेषु चरः भिन्नः अस्ति
(ii)	15x –21x	15 x, –21,x	समानः	समानम्	
(iii)	– 4ab 7 ba	– 4,a,b 7,a,b	समानः	समानम्	स्मरणं रक्षन्तु ab = ba
(iv)	3xy 3x	3,x,y 3,x	भिन्नः	असमानम्	y इति चरं केवलमात्रं प्रथमे पदे अस्ति।
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	6,x,y,y 9,x,x,y	भिन्नः	असमानम्	द्वयोः पदयोःचरः तु एकः एव परन्तु एतयोः घातौ भिन्नौ स्तः
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	1,p,q,q - 4,p,q,q	समानः	समानम्	अवधानं यच्छन्तु 1 इति संख्यात्मकः गुणाङ्कः न दर्श्यते

निम्नलिखितैः सरलचरणैः एतं निर्णयं स्वीकर्तुं भवतां साहाय्यं भविष्यति यत् प्रदत्तानि पदानि समानानि सन्ति अथवा असमानानि सन्ति -

(i) सङ्ख्यात्मक-गुणाङ्कान् विहाय केवलं पदानां बीजीयभागं प्रति एव स्वीयम् अवधानं कुर्वन्तु।
(ii) पदेषु चराणाम् अवेक्षणं कुर्वन्तु। तेषु समानता भवेत्।
(iii) सम्प्रति पदेषु प्रत्येकं चरस्य घातानाम् अवेक्षणं कुर्वन्तु। एते घाताः समानाः एव स्युः। अवधानं यच्छन्तु यत् समानपदानां निर्णय-स्वीकरण-सन्दर्भे एतयोः द्वयोः तथ्ययोः कश्चन अपि प्रभावः न जायते : (1) पदानां सङ्ख्यात्मकाः गुणाङ्काः तथा च (2) पदेषु चर-गुणनस्य क्रमः।

प्रश्नावली 12.1

1. निम्नलिखित-स्थितिषु चराणाम् अचराणाम् अथ च अङ्क-गणितीय-सङ्क्रियाणां प्रयोगं कृत्वा बीजीय-व्यञ्जकान् प्राप्नुवन्तु -
   (i) z इति सङ्ख्यातः y इति सङ्ख्यायाः व्यवकलनम्।
   (ii) x तथा च y इति सङ्ख्ययोः योगस्य अर्धम्।
   (iii) z इति सङ्ख्या आत्मना एव गुण्यते।
   (iv) p तथा च q इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य चतुर्थांशः।
   (v) x तथा च y इति सङ्ख्ययोः वर्गाणां योजनं क्रियते।
   (vi) m तथा च n इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य त्रिगुणिते 5 इति सङ्ख्यायाः योजनम्।
   (vii) 10 इति संख्यातः y तथा च z इति सङ्ख्ययोः गुणनफलस्य व्यवकलनम्।
   (viii) a तथा च b इति सङ्ख्ययोः गुणनफलात् तयोः योगस्य व्यवकलनम्।
2. (i) निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु पदानि तेषां च गुणनखण्डान् परिचिन्वन्तु। पदानि तथा तेषां च गुणनखण्डान् वृक्षारेखरूपेण अपि दर्शयन्तु।
   (a) $x-3$ (b) $1+x+x^2$ (c) $y-y^3$
   (d) $5xy^2+7x^2y$ (e) $-ab+2b^2-3a^2$
   (ii) अधोदत्तेषु व्यञ्जकेषु पदानि तेषां च गुणनखण्डान् परिचिन्वन्तु
   (a) $-4x+5$ (b) $-4x+5y$ (c) $5y+3y^2$
   (d) $xy+2x^2y^2$ (e) $pq+q$ (f) $1.2\,ab-2.4\,b+3.6\,a$
   (g) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$ (h) $0.1\,p^2+0.2\,q^2$
3. निम्नलिखित-व्यञ्जकेषु पदानां सङ्खात्मक-गुणाङ्कान् (ये अचराः न स्युः) परिचिन्वन्तु।
   (i) $5-3t^2$ (ii) $1+t+t^2+t^3$ (iii) $x+2xy+3y$
   (iv) $100m+1000n$ (v) $-p^2q^2+7pq$ (vi) $1.2\,a+0.8\,b$
   (vii) $3.14\,r^2$ (viii) $2\,(l+b)$ (ix) $0.1\,y+0.01\,y^2$
4. (a) येषु पदेषु x इति अस्ति तानि पदानि परिचिन्वन्तु पुनश्च x इत्यस्य गुणाङ्कं लिखन्तु।
   (i) y^2x+y (ii) $13y^2-8yx$ (iii) $x+y+2$
   (iv) $5+z+zx$ (v) $1+x+xy$ (vi) $12xy^2+25$
   (vii) $7+xy^2$
   (b) तानि पदानि परिचिन्वन्तु येषु y^2 इति अस्ति तदन्तरम् एषु y^2 इत्यस्य गुणाङ्कं लिखन्तु।
   (i) $8-xy^2$ (ii) $5y^2+7x$ (iii) $2x^2y-15xy^2+7y^2$
5. निम्नलिखित-व्यञ्जकानि एकपद-द्विपद-त्रिपदरूपेण वर्गीकुर्वन्तु -
   (i) $4y-7z$ (ii) y^2 (iii) $x+y-xy$ (iv) 100
   (v) $ab-a-b$ (vi) $5-3t$ (vii) $4p^2q-4pq^2$
   (viii) $7mn$ (ix) z^2-3z+8 (x) a^2+b^2
   (xi) z^2+z (xii) $1+x+x^2$

6. ज्ञापयन्तु यत् प्रदत्त-पदानां युग्माः समानपदानि सन्ति अथवा असमानपदानि सन्ति -

(i) 1, 100 (ii) $-7x, \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

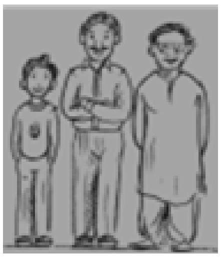
7. निम्नलिखितेषु समानपदानि परिचिन्वन्तु -

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y, -6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p, 78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

12.6 बीजीय-व्यञ्जकानां योगः तथा च व्यवकलनम्

निम्नलिखित-समस्यानां विषये विचारं कुर्वन्तु -



1. सरितायाः पार्श्वे काश्चन काचगुलिकाः सन्ति। अमीनायाः पार्श्वे सरितातः दशाधिकाः काचगुलिकाः सन्ति। विनोदः कथयति यत् तस्य पार्श्वे अमीनासरितयोः पार्श्वे यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति ततः त्र्यधिकाः काचगुलिकाः सन्ति। भवन्तः विनोदस्य काचगुलिकानां सङ्ख्यां कथं ज्ञास्यन्ति ?

   यतो हि एतत् दत्तं नास्ति यत् सरितायाः पार्श्वे कति काचगुलिकाः सन्ति अतः वयम् इमाः x इति मन्यामहे। अमीनायाः पार्श्वे आभ्यः दशाधिकाः अर्थात् $x + 10$ एतावत्यः काचगुलिकाः सन्ति। विनोदः वदति यत् तस्य पार्श्वे अमीनासरितयोः पार्श्वे अखिलाः यावत्यः काचगुलिकाः सन्ति ततः त्र्यधिकाः काचगुलिकाः सन्ति।

   अतः वयम् अमीनासरितयोः काचगुलिकानां योगं ज्ञात्वा तस्मिन् च योगे 3 इति योजयामः अर्थात् वयम् $x, x + 10$ तथा च 3 इति योजयामः।

2. रामस्य पितुः वर्तमानम् आयुः रामस्य आयुषः त्रिगुणितम् अस्ति। रामस्य पितामहस्य आयुः रामस्य तथा च रामस्य पितुः आयुषः योगात् त्रयोदश-वर्षाधिकम् अस्ति। भवन्तः रामस्य पितामहस्य आयुः कथं ज्ञास्यन्ति ?

   यतो हि रामस्य आयुः दत्तं नास्ति अतः एतत् y वर्षं मन्यामहे। तदानीं तस्य पितुः आयुः $3y$ वर्षात्मकम् अस्ति। रामस्य पितामहस्य आयुषः परिज्ञानाय वयं रामस्य आयुषः y इत्यस्य तस्य च पितुः आयुषः $3y$ इत्यस्य योगं ज्ञात्वा अस्मिन् योगे 13 इति योजनीयं भविष्यति। अर्थात् y, $3y$ तथा च 13 इत्येतेषां योगः अस्माभिः ज्ञातव्यः भविष्यति।

3. कस्मिंश्चिद् उद्याने पाटलस्य एवं च गन्धपुष्पस्य पादपानि वर्गाकार-राजिकासु उप्यन्ते। यस्यां वर्गाकार-राजिकायां गन्धपुष्पाणां पादपानि उप्यन्ते तस्याः भुजस्य दैर्घ्यं तस्याः वर्गाकार-राजिकायाः भुजस्य दैर्घ्यात् त्रिमीटराधिकम् अस्ति यस्यां पाटल-पादपानि उपितानि सन्ति। गन्धपुष्पाणां राजिका पाटलपुष्पाणां राजिकातः क्षेत्रफल-दृष्ट्या कियती दीर्घा अस्ति ?

   आगच्छन्तु पाटलपुष्प-राजिकायाः भुजम् 1 मीचर्मितं मन्यामहे। तदा गन्धपुष्प-राजिकायाः भुजः (1+3) मीटर्मितः भविष्यति। पाटलपुष्प-राजिकायाः क्षेत्रफम् 1^2 मितं तथा च गन्धपुष्प-राजिकायाः क्षेत्रफलम् $(1 + 3)^2$ मितं भविष्यति। अनयोः अन्तरम् एव एतत् ज्ञापयिष्यति यत् गन्धपुष्प-राजिका पाटलपुष्प-राजिकातः क्षेत्रफलदृष्ट्या कियती दीर्घा अस्ति।

   उपर्युक्त-स्थितित्रये अस्माभिः बीजीय-व्यञ्जकानां योजनम् अथवा व्यवकलनं कृतम्। दैनिक-जीवने एतादृश्यः अनेकाः स्थितयः अस्माकं सम्मुखे (पुरतः) आयान्ति यत्र अस्माभिः बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगः करणीयः भवति तथा च तेषु अङ्क-गणितीय-सङ्क्रियाः करणीयाः भवन्ति। अस्मिन् अनुच्छेदे वयं द्रक्ष्यामः यत् बीजीय-व्यञ्जकाः कथं योज्यन्ते व्यवकल्यन्ते च।

एतान् कुर्वन्तु

न्यूनातिन्यूनम् एतादृश्योः द्वयोः स्थित्योः विषये विचारं कुर्वन्तु ययोः प्रत्येकस्यां भवतां कृते द्वयोः बीजीय-व्यञ्जकयोः निर्माणस्य आवश्यकता भवेत् तथा च तयोः योजनं व्यवकलनं वा आवश्यकं स्यात्।

समान पदानां योजनं व्यवकलनं च

सरलतमाः व्यञ्जकाः एकपदिनः भवन्ति । एषु केवलम् एकमेव पदं भवति । प्रारम्भं कर्तुं वयम् एतत् अधिगमिष्यामः यत् समानपदानि कथं योज्यन्ते व्यवकल्यन्ते च।

- आगच्छन्तु $3x$ तथा च $4x$ इति योजयामः। वयं जानीमः यत् x इति कापि सङ्ख्या अस्ति अतः $3x$ तथा च $4x$ इति अपि सङ्ख्ये स्तः।
- अधुना $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

  $= (3 + 4) \times x$ (वितरणस्य अथवा विभजनस्य गुण-प्रयोगेण)

  $= 7 \times x = 7x$

यतोहि चराः सङ्ख्याः एव सन्ति अतः वयं वितरणगुणस्य प्रयोगं कर्तुं शक्नुमः।

अथवा $3x + 4x = 7x$

आयान्तु अधुना अग्रे $8xy$, $4xy$ तथा च $2xy$ इति योजयामः।

$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$

$= (8 + 4 + 2) \times xy$

$= 14 \times xy = 14xy$

अथवा $8xy + 4xy + 2xy = 14\,xy$

अधुना $7n$ इत्यस्मात् $4n$ इत्येतत् व्यवकलयामः।

$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$

$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$

अथवा $7n - 4n = 3n$

अनेन एव प्रकारेण $11ab$ इत्यस्मात् $5ab$ इत्येतत् व्यवकलयामः।

$11ab - 5ab = (11 - 5)\,ab = 6ab$

अनेन प्रकारेण द्वयोः अथवा द्व्यधिकानां समानपदनां योगः समानपदं भवति यस्य सङ्ख्यात्मकः गुणाङ्कः सर्वेषां समानपदानां गुणाङ्कानां योगेन समानः भवति।

अनेन प्रकारेण द्वयोः समानपदयोः अन्तरम् एकं समानपदं भवति यस्य सङ्ख्यात्मकः गुणाङ्कः द्वयोः समानपदयोः सङ्ख्यात्मक-गुणाङ्कानाम् अन्तरस्य समानः भवति।

अवधानं कुर्वन्तु यत् असमान-पदानि तथा न योजयितुम् अथवा व्यवकलयितुं शक्यन्ते यथा समानपदानि योजयितुम् अथवा व्यवकलयितुं शक्यन्ते। अस्य उदाहरणानि वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः। यदा वयम् x मध्ये 5 इति योजयामः तदा वयं परिणामम् $(x + 5)$ इत्यस्मिन् रूपे लिखामः। अवधानं कुर्वन्तु यत् $(x + 5)$ इत्यस्मिन् 5 तथा च x इति उभे पदे पूर्ववत् एव स्तः। अनेन एव प्रकारेण यदि वयम् $3xy$ तथा च 7 इत्येते असमानपदे योजयामः तदा $3xy + 7$ इति योगः अस्ति।

यदि $3xy$ इत्यस्मात् 7 इति व्यवकलयामः तदा $3xy - 7$ इति परिणामः अस्ति।

व्यापक-बीजीय-व्यञ्जकानां समाकलनं व्यवकलनं च

आयान्तु कानिचित् उदाहरणानि स्वीकुर्मः

- $3x + 11$ तथा च $7x - 5$ इति योजयन्तु।

  वाञ्छितः योगः $= 3x + 11 + 7x - 5$

अधुना वयं जानीमः यत् $3x$ तथा च $7x$ इति समानपदे स्तः तथा च 11 एवञ्च – 5 इत्यपि समानपदे स्तः । सहैव $3x + 7x = 10x$ तथा च $11 + (-5) = 6$ इति स्तः। अतः वयम् उपर्युक्त योगं निम्नानुसारं सरलीकर्तुं शक्नुमः।

योगः $= 3x + 11 + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5$ (पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते)

$= 10x + 6$

अतः $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ तथा च $7x - 5$ इति योजयन्तु ।

योगः $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$ (पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते)

अवधानं कुर्वन्तु यत् अस्माभिः समानपदानि सार्धमेव स्थापितानि तथा च $8z$ इति एकाकि असमानपदं तथैव तिष्ठति ।

अतः योगः $= 10x + 6 + 8z$

- $3a - b + 4$ इत्यस्मात् $a - b$ इति व्यवकलयन्तु ।

अन्तरम् $= 3a - b + 4 - (a - b)$

$= 3a - b + 4 - a + b$

अवधानं कुर्वन्तु यत् केन प्रकारेण अस्माभिः $(a - b)$ इति कोष्ठके स्थापितं तथा च कथं कोष्ठकानाम् उद्घाटनसमये चिह्नानाम् अवधानं कृतम् अस्ति । समानपदानि सहैव स्थापयितुं पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते सति

अन्तरम् $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3 - 1)\,a + (1 - 1)\,b + 4$

अन्तरम् $= 2a + (0)\,b + 4 = 2a + 4$

अथवा $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

अवधानं कुर्वन्तु

यथा $-(5-3) = -5 + 3$ इति अस्ति तथा एव $-(a-b) = -a + b$ इति अस्ति । बीजीयचिह्नैः तथैव कार्यं क्रियते यथा सङ्ख्याचिह्नैः क्रियते ।

अधुना वयम् अभ्यासाय व्यञ्जकानां योग-व्यवकलन-सम्बन्धीनि कानिचित् उदाहरणानि सात्स्यामः।

उदाहरणम् 4 समानपदानि एकत्रीकृत्य

$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$ इति व्यञ्जकं सरलं कुर्वन्तु -

समाधानम् पदानां पुनर्व्यवस्थापने कृते सति अस्माभिः प्राप्यते :

$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$

$= (12 - 4)\,m^2 + (5 - 9 - 7)\,m + 10$

$= 8m^2 + (-4 - 7)\,m + 10$

$= 8m^2 + (-11)\,m + 10$

$= 8m^2 - 11m + 10$

प्रयासं कुर्वन्तु

योजयन्तु व्यवकलयन्तु च

(i) $m - n,\ m + n$

(ii) $mn + 5 - 2,\ mn + 3$

उदाहरणम् 5 $24ab - 10b - 18a$ इत्यस्मात् $30ab + 12b + 14a$ इति व्यवकलयन्तु

समाधानम् $30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$

$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$

$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$

$= 6ab + 22b + 32a$

वैकल्पिकरूपेण वयं व्यञ्जकान् अन्योऽन्यम् अधोऽधः कृत्वा अनेन प्रकारेण स्थापयामः यत् समानपदानि एकस्याम् एव पङ्क्तौ अर्थात् स्तम्भेषु एव तिष्ठेयुः यथा अधः निर्दर्शितम् अस्ति :

$$\begin{array}{r} 30ab + 12b + 14a \\ 24ab - 10b - 18a \\ - \quad + \quad + \\ \hline 6ab + 22b + 32a \\ \hline \end{array}$$

अवधानं कुर्वन्तु यत् कस्यचित् पदस्य व्यवकलनस्य अर्थः तस्य 'योज्य-प्रतिलोमस्य योजनम्' इति भवति। अतः $-10b$ इत्यस्य व्यवकलनस्य अर्थः अस्ति यत् $+10b$ इत्यस्य योजनम्। $-18a$ इत्यस्य व्यवकलस्य अर्थः अस्ति यत् $+18a$ इत्यस्य योजनं तथा च $24ab$ इत्यस्य व्यवकलस्य अर्थः अस्ति यत् $-24ab$ इत्यस्य योजनम्। व्यवकल्यमानस्य व्यञ्जकस्य अधः प्रदर्शितानि चिह्नानि व्यवकलनप्रक्रियाम् उचितरूपेण सम्पादयितुं सहायकाः भवन्ति।

उदाहरणम् 6 $2y^2 + 3yz, - y^2 - yz - z^2$ तथा च $yz + 2z^2$, इत्यनयोः योगात् $3y^2 - z^2$ एवञ्च $-y^2 + yz + z^2$ इत्यनयोः योगं व्यवकलयन्तु

समाधानम् सर्वप्रथमम् $2y^2 + 3yz, - y^2 - yz - z^2$ तथा च $yz + 2z^2$ इति योजयामः।

$$\begin{array}{r} 2y^2 + 3yz \qquad \\ -y^2 - yz - z^2 \\ + yz + 2z^2 \\ \hline y^2 + 3yz + z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

पुनः वयम् $3y^2 - z^2$ एवञ्च $-y^2 + yz + z^2$ इत्येतौ व्यञ्जकौ योजयामः

$$\begin{array}{r} 3y^2 \qquad - z^2 \\ -y^2 + yz + z^2 \\ \hline 2y^2 + yz \qquad \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

अधुना वयम् (1) इत्स्मात् योगात् (2) इत्येतं योगं व्यवकलयामः।

$$\begin{array}{r} y^2 + 3yz + z^2 \\ 2y^2 + yz \qquad \\ - \quad - \qquad \\ \hline -y^2 + 2yz + z^2 \\ \hline \end{array}$$

प्रश्नावली 12.2

1. समानपदानि संयोज्य सरलीकुर्वन्तु -
   (i) $21b - 32 + 7b - 20b$
   (ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$
   (iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$
   (iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$
   (v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$
   (vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. योजनं कुरूत -

(i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$

(ii) $t-8tz, 3tz-z, z-t$

(iii) $-7mn+5, 12mn+2, 9mn-8, -2mn-3$

(iv) $a+b-3, b-a+3, a-b+3$

(v) $14x+10y-12xy-13, 18-7x-10y+8xy, 4xy$

(vi) $5m-7n, 3n-4m+2, 2m-3mn-5$

(vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2-4pq+5, -10p^2q^2, 15+9pq+7p^2q^2$

(ix) $ab-4a, 4b-ab, 4a-4b$

(x) $x^2-y^2-1, y^2-1-x^2, 1-x^2-y^2$

3. व्यवकलयन्तु -

(i) y^2 इत्यस्मात् $-5y^2$ इति

(ii) $-12xy$ इत्यस्मात् $6xy$ इति

(iii) $(a+b)$ इत्यस्मात् $(a-b)$ इति

(iv) $b(5-a)$ इत्यस्मात् $a(b-5)$ इति

(v) $4m^2-3mn+8$ इत्यस्मात् $-m^2+5mn$ इति

(vi) $5x-10$ इत्यस्मात् $-x^2+10x-5$ इति

(vii) $3ab-2a^2-2b^2$ इत्यस्मात् $5a^2-7ab+5b^2$ इति

(viii) $5p^2+3q^2-pq$ इत्यस्मात् $4pq-5q^2-3p^2$ इति

4. (a) $2x^2+3xy$ इति प्राप्तुम्, x^2+xy+y^2 इत्यनेन किं योजनीयम् ?

(b) $-3a+7b+16$ इति प्राप्तुम् $2a+8b+10$ इत्यस्मात् किं व्यवकलनीयम् ?

5. $-x^2-y^2+6xy+20$ इति प्राप्तुम् $3x^2-4y^2+5xy+20$ इत्यस्मात् किं निष्कासनीयम् ?

6. (a) $3x-y+11$ तथा च $-y-11$ इत्यनयोः योगात् $3x-y-11$ इत्येतं व्यवकलयन्तु ?

(b) $4+3x$ एवञ्च $5-4x+2x^2$ इत्यनयोः योगात् $3x^2-5x$ एवञ्च $-x^2+2x+5$ इत्यनयोः योगं व्यवकलयन्तु ?

12.7 कस्यचित् व्यञ्जकस्य मानम् -

वयं जानीमः यत् कस्यचित् बीजीय-व्यञ्जकस्य मानं तस्य व्यञ्जकस्य निर्मातृ-चराणां मानेषु आश्रितं वर्तते। एतादृश्यः अनेकाः स्थितयः सन्ति यत्र अस्माभिः व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातव्यानि भवन्ति यथा वयम् एतद् अवेक्षणं कर्तुम् इच्छामः यत् चरस्य एकं विशेषमानं दत्तं समीकरणं सन्तोषयति न वा। यदा वयं ज्यामितेः एवञ्च दैनिक-गणितीय-सूत्राणां प्रयोगं कुर्मः तदा अपि वयं व्यञ्जकानां मानं जानीमः।

उदाहराणार्थम् l इति भुजमतः वर्गस्य क्षेत्रफलम् l^2 इति भवति। यदि l इति भुजा पञ्चसेण्टीमीटरमिता अस्ति तदा क्षेत्रफलं 5^2 से.मी.^{2} = 25 से.मी.^{2} इति अस्ति। यदि भुजः 10 सेण्टीमीटर्मितः अस्ति तदा क्षेत्रफलम् 10^2 से.मी^{2} = 100 से.मी^{2} अस्ति।

वयम् एतादृशानि अन्यानि कतिपयानि उदाहरणानि अग्रिमे अनुच्छेदे द्रक्ष्यामः।

उदाहरणम् 7 $x = 2$ इत्येतदर्थं निम्नलिखित-व्यञ्जकानां मानानि जानीत।

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$ (iv) $100 - 10x^3$

समाधानम्

(i) $x + 4$ इत्यत्र $x = 2$ इति स्थापिते सति अस्माभिः $x + 4$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्यते -

$x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ इत्यत्र $x = 2$ इति स्थापिते सति अस्माभिः प्राप्यते :

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$

(iii) $19 - 5x^2$ इत्यस्मिन् $x = 2$ इति संस्थाप्य वयम् $19 - 5x^2$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्नुमः

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = -1$

(iv) $100 - 10x^3$ इत्यस्मिन् $x = 2$ इति संस्थाप्य वयम् $100 - 10x^3$ इत्यस्य निम्नलिखितमानं प्राप्नुमः:

$100 - 10x^3 = 100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (अवधानं यच्छन्तु यत् $2^3 = 8$)

$= 100 - 80 = 20$

उदाहरणम् 8 निम्नलिखित-व्यञ्जकानां मानानि जानीत यदा $n = -2$ इति अस्ति।

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

समाधानम्

(i) $5n - 2$ इत्यस्मिन् $n = -2$ इति संस्थापिते सति अस्माभिः प्राप्यते -

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ इत्यस्मिन् $n = -2$ एतदर्थम् $5n - 2 = -12$ इति अस्ति तथा च

$5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [यतोहि $(-2)^2 = 4$]

द्वयोः मेलनेन वयं प्राप्नुमः

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) अधुना $n = -2$ एतदर्थम् $5n^2 + 5n - 2 = 8$

तथा च $n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$ इति अस्ति।

द्वयोः मेलनेन वयं प्राप्नुमः

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

अधुना वयं द्विचरात्मकेषु व्यञ्जकेषु यथा $x + y$, xy इत्यादिषु विचारं करिष्यामः। कस्यचित् द्विचरात्मक-व्यञ्जकस्य सङ्ख्यात्मकं मानं ज्ञातुम् अस्माकं कृते अस्मिन् व्यञ्जके द्वयोः चरयोः माननिवेशनम् आवश्यकम् अस्ति।

उदाहरणार्थम् $x = 3$ तथा च $y = 5$ एतयोः कृते $(x + y)$ इत्यस्य मानम् $3 + 5 = 8$ इति अस्ति।

उदाहरणम् 9 $a = 3$ तथा च $b = 2$ इत्येतयोः कृते

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

समाधानम् प्रदत्तेषु व्यञ्जकेषु $a = 3$ तथा च $b = 2$ इत्यनयोः स्थापनेन अस्माभिः निम्नं प्राप्यते

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13.$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

प्रश्नावली 12.3

1. यदि $m = 2$ इति अस्ति तर्हि निम्नलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

(iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2. यदि $p = -2$ इति अस्ति तदा निम्नलिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. यदि$x = -1$ इति तदा निम्नलिखितानां व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$ (iv)$2x^2 - x - 2$

4. यदि $a = 2$ तथा च $b = -2$ इति अस्ति तदा निम्न-लिखितानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. यदा$a = 0$ एवञ्च $b = -1$ इति अस्ति तदा दत्त-व्यञ्जकानां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$

(iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$ (iv) $a^2 + ab + 2$

6. यदा x इत्यस्य मानम् 2 इति अस्ति तदा निम्न-व्यञ्जकान् सरलीकृत्य एतेषां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत।

(i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

(iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. एतान् व्यञ्जकान् सरलीकुर्वन्तु तथा च एतेषां मानानि ज्ञातुं प्रयासं कुरूत यदि $x = 3$, $a = -1$ एवञ्च $b = -2$ इति अस्ति।

(i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$ (iii) $3a + 5 - 8a + 1$

(iv) $10 - 3b - 4 - 5b$ (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) यदि $z = 10$ इति भवेत् तदा $z^3 - 3(z - 10)$ इत्यस्य मानं ज्ञायताम्।

(ii) यदि $p = -10$ इति भवेत् तदा $p^2 - 2p - 100$ इत्यस्य मानं ज्ञायताम्।

9. यदा $x = 0$ इत्यनेन मानेन $2x^2 + x - a$ इत्यस्य मानम् (5) पञ्चानां समानम् अस्ति तदा a इत्यस्य मानं किं भवेत्?

10. $2(a^2 + ab) + 3 - ab$ इति व्यञ्जकं सरलीकृत्य अस्य मानं ज्ञातुं प्रयासं कुरूत यदा $a = 5$ तथा च $b = -3$ इति भवेत्।

12.8 बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोग-सूत्राणि अथ च नियमाः

वयं पूर्वमेव दृष्टवन्तः स्मः यत् गणिते सूत्राणि नियमान् च सङ्क्षिप्तरूपेण व्यापकरूपेण च बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कृत्वा लेखितुं शक्नुमः । वयम् अधः अनेकानि उदाहरणानि द्रक्ष्यामः

- **परिमापसूत्रम्**

1. कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः $= 3 \times$ तस्य भुजस्य दीर्घता इति भवति । यदि अस्य समबाहुत्रिभुजस्य भुजस्य दीर्घतां l द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा तस्य समबाहुत्रिभुजस्य परिमापः$= 3l$ इति भविष्यति ।
2. अनेन प्रकारेण कस्यचित् **वर्गस्य परिमापः$= 4l$ इति भवति यत्र l इति** वर्गस्य भुजानां दीर्घता अस्ति।
3. कस्यचित् समबाहुत्रिभुजस्य **परिमापः $= 5l$ इति** भवति यत्र च l इति तस्य भुजानां दीर्घता अस्ति। इत्यादि।

- **क्षेत्रफलसूत्रम्**

1. यदि वयं कस्यचित् वर्गस्य भुजम् l द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा वर्गस्य क्षेत्रफलम् $= l^2$ इति भवति ।
2. यदि वयं कस्यचित् आयतस्य दैर्घ्यं विस्तृतिं च क्रमशः l तथा च b इत्यनयोः द्वारा व्यक्तीकुर्मः तदा आयातस्य क्षेत्रफलम् $= l \times b = lb$ इति भवति ।
3. अनेन प्रकारेण यदि कस्यचित् त्रिभुजस्य आधारः b एवञ्च औन्नत्यम् h इति अस्ति तदा त्रिभुजस्य क्षेत्रफलम् $= \dfrac{b \times h}{2} = \dfrac{bh}{2}$ इति भवति ।

यदि एकवारं कस्यचित् प्रदत्तराशेः कृते सूत्रम् अर्थात् बीजीय-व्यञ्जकं ज्ञातं भवेत्तदा तस्य राशेः मानम् इष्ट-प्रतिबन्धानाम् अन्तर्गतं परिकलयितुं शक्यते ।

उदाहरणार्थं 3 cm भुजमतः कस्यचित् प्रदत्तवर्गस्य परिमापः, वर्गस्य परिमापस्य $4l$ इति सूत्रे $l =$ 3 से.मी.इति संस्थापनेन प्राप्यते ।

प्रदत्तवर्गस्य परिमापः $= (4 \times 3)$ से.मी. $= 12$ से.मी.

अनेन एव प्रकारेण अस्य क्षेत्रफलं वर्गक्षेत्रफलस्य व्यञ्जके अर्थात् l^2 इत्यस्मिन् ($l = 3$ से.मी.) इति संस्थाप्य प्राप्यते ।

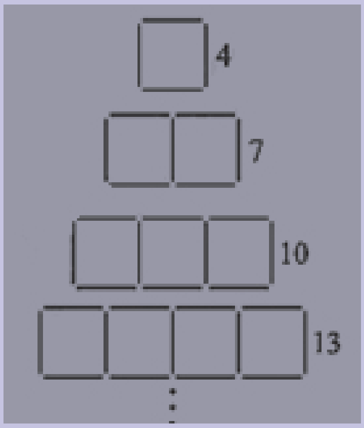
प्रदत्तवर्गस्य क्षेत्रफलम् $= 3^2$ से.मी.$^2 = 9$ से.मी.^{2}

- **सङ्ख्याप्रतिरूपेभ्यः (patterns) नियमाः**

निम्नलिखित-कथनानां विषये अध्ययनं कुर्वन्तु -

1. यदि काञ्चित् प्राकृत-सङ्ख्याम् n द्वारा व्यक्तीकुर्मः तर्हि तस्याः परिवर्ती (successor) $(n + 1)$ इति भवति । वयम् अस्य अवेक्षणं कस्याश्चिद् अपि प्राकृतसङ्ख्यायाः कृते कर्तुम् अर्हामः । उदाहरणार्थं यदि प्राकृतसङ्ख्या 10 अस्ति तर्हि तस्याः परिवर्ती 10+1 इति अस्ति यः सर्वविदितः अस्ति (ज्ञातम् अस्ति) ।
2. यदि काचित् प्राकृत-सङ्ख्या n द्वारा व्यक्तीक्रियेत तदा 2n इति एका समसङ्ख्या भवति तथा च $(2n + 1)$ इति काचित् विषमसङ्ख्या भवति । आयान्तु अस्य अवेक्षणम् अपि मन्यन्तां काञ्चित् पञ्चदश (15) इति प्राकृतसङ्ख्यां स्वीकृत्य कुर्मः । अधुना $2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$ इति अस्ति अथवा यथार्थतः एका समसङ्ख्या अस्ति तथा च $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ इति या अथवा एका विषमसङ्ख्या अस्ति ।

एतान् कुर्वन्तु



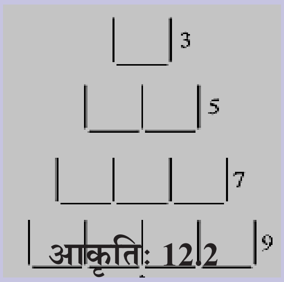
आकृतिः 12.1

अग्निपेटिकायाः शलाकानां दन्तधावनशलाकानां शरकाण्डानां च समानदैर्घ्यखण्डानां लघुरेखाखण्डान् स्वीकुर्वन्तु। तान् आकृतिषु दर्शितानुसारं प्रतिरूपेषु योजयन्तु -

1. 12.1 इति आकृत्यां निर्मितं प्रतिरूपं पश्यतु।

एतेषु चतसृभिः रेखाभिः इति निर्मिताकारस्य पुनरावृत्तिः जायमाना अस्ति । यथा भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् एकम् आकारं निर्मातुं चतुर्णां रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भवति। द्वयोः आकारयोः कृते सप्तानां तथा च आकारत्रयस्य कृते दशानां रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भवति। यदि आकाराणां सङ्ख्या n इति भवेत् तदा तान् निर्मातुम् अपेक्षित-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $(3n + 1)$ इति भविष्यति। भवन्तः अस्य प्रामाणिकतायाः अवेक्षणम् $n = 1, 2,3, 4, ..., 10, ...$इत्यादीन् स्वीकृत्य कर्तुं शक्नुवन्ति। यदि निर्मिताकाराणां सङ्ख्या 3 अस्ति तदा आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ इति भवति यथा आकृत्यां द्रष्टुं शक्यते।

2. इदानीम् 12.2. इति आकृत्यां दत्तेषु प्रतिरूपेषु विचारं कुर्वन्तु। अत्र इति आकारस्य पुनरावृत्तिः जायमाना अस्ति।

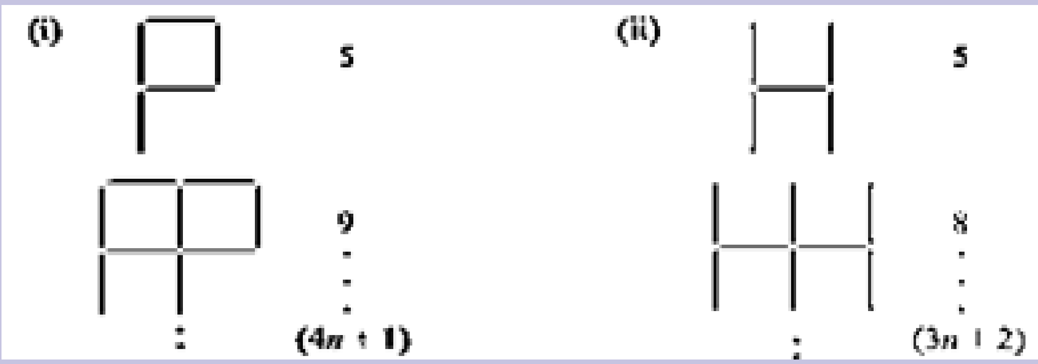


आकृतिः 12.2

1, 2, 3, 4, ... इत्यादीन् आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्याः क्रमशः 3, 5, 7, 9, ...इति सन्ति । यदि n द्वारा निर्मितानाम् आकाराणां सङ्ख्या क्रमशः व्यक्तीक्रियते तदा आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $(2n + 1)$ इति व्यञ्जकात् प्राप्स्यते। व्यञ्जकम् उचितम् अस्ति अथवा अनूचितम् अस्ति इत्यस्य अवेक्षणं भवन्तः n, इत्यस्य किमपि मानं गृहीत्वा कर्तुम् अर्हन्ति। उदाहरणार्थम् $n = 4$ इति स्वीकृते सति अभीष्ट-रेखाखण्डानां सङ्ख्या $(2n + 1) = (2 \times 4) + 1 = 9$ इति भविष्यति या यथार्थतः 4 U इति निर्मातुम् आवश्यकी अस्ति।

एतान् कुर्वन्तु

दर्शितान् आधारभूतान् आकारान् आदाय उपर्युक्त-प्रकारकाणि प्रतिरूपाणि रचयन्तु -



(Pआकारः) (Hआकारः)

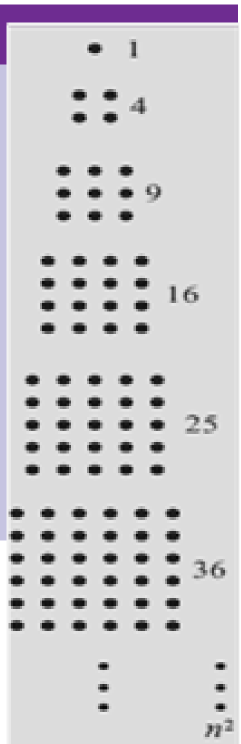
आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां सङ्ख्या दक्षिणतः लिखिता अस्ति। सममेव आकारान् निर्मातुम् आवश्यक-रेखाखण्डानां दर्शयिता n इति व्यञ्जकः अपि दक्षिणतः दत्तः अस्ति।

अग्रे सरन्तु तथा च एतादृशानि अन्यानि प्रतिरूपाणि अन्वेष्टुं प्रयासं कुर्वन्तु।

एतान् कुर्वन्तु

आकृत्यां दर्शितम् अस्ति तदनुसारं बिन्दूनां (dots) प्रतिरूपाणि रचयन्तु । यदि भवन्तः एकम् आलेख-कागदम् अथवा बिन्द्वङ्कितं कागदम् (dot-paper) स्वीकुर्वन्ति तर्हि प्रतिरूपाणां रचना सरला भविष्यति।

पश्यन्तु यत् कथं बिन्दवः वर्गे व्यवस्थीकृताः सन्ति। यदि कस्मिंश्चित् विशिष्टाकारे एकस्यां पङ्क्तौ अथवा एकस्मिन् स्तम्भे बिन्दूनां सङ्ख्यां n चर-रूपेण स्वीकुर्मः तर्हि आकारे समस्त-बिन्दूनां सङ्ख्या $n \times n = n^2$ इति व्यञ्जकात् प्राप्ता भविष्यति। उदाहरणार्थम् $n = 4$ इति स्वीकुर्वन्तु। तस्य आकारस्य कृते यस्य प्रत्येकस्यां पङ्क्तौ (प्रत्येकस्मिन् स्तम्भे) चत्वारः बिन्दवः सन्ति तदा समस्त-बिन्दूनां सङ्ख्या $4 \times 4 = 16$ इति भविष्यति अथवा वस्तुतः आकृत्यां द्रष्टुं शक्यते। भवन्तः एतादृशम् अवेक्षणम् n इत्यस्य अन्यं मानं स्वीकृत्य अपि कर्तुम् अर्हन्ति। प्राक्तनैः यूनानीगणितज्ञैः इमाः सङ्ख्याः 1, 4, 9, 16, 25,... वर्गसङ्ख्याभिः (square numbers) नामाङ्किताः कृताः।



- **कानिचन अन्यानि सङ्ख्याप्रतिरूपाणि**

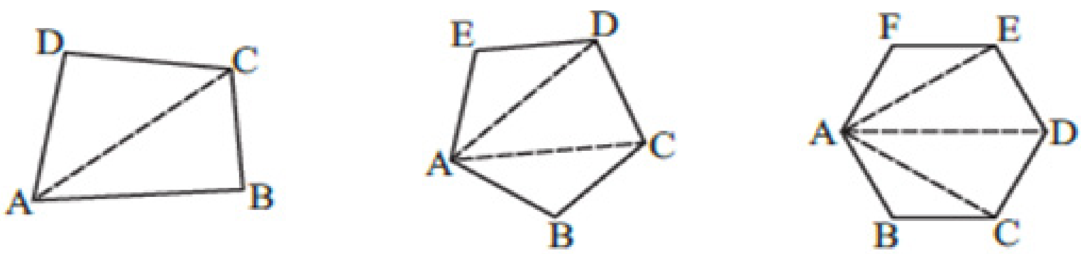
आयान्तु सङ्ख्यानाम् एकम् अन्यं प्रतिरूपं विचारयामः यस्मिन् अस्माकं सहायतार्थं कापि आकृतिः निर्मिता नास्ति : 3, 6, 9, 12,...,3n, ...

इमाः सङ्ख्याः 3 इत्यस्य गुणजाः सन्ति इमाः च 3 तः आरभ्य आरोहिक्रमेण व्यवस्थापिताः सन्ति। n तमे स्थाने आगम्यमानं पदम् 3n द्वारा व्यक्तीकृतम् अस्ति तथा च अस्य साहाय्येन भवन्तः सफलतापूर्वकं दशमे स्थाने आगम्यमानम् $3 \times 10 = 30$ इति पदम् एवञ्च शततमे स्थाने आगम्यमानम् $3 \times 100 = 300$ इति पदं ज्ञातुं शक्नुवन्ति।

- **ज्यामितौ प्रतिरूपाणि**

कस्यचित् चतुर्भुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या एका एव अस्ति।

कस्यचित् पञ्चभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या 2 अस्ति।



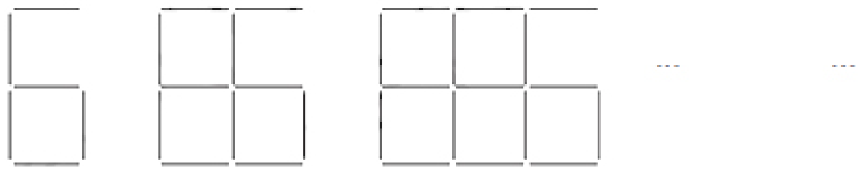
कस्यचित् षड्भुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् तस्य कति विकर्णाः आलेखितुं शक्यन्ते ? अवेक्षणं कुर्वन्तु यत् एतेषां सङ्ख्या 3 अस्ति।

n भुजावतः कस्यचित् बहुभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् वयम् आहत्य (n – 3) विकर्णान् आलेखितुं शक्नुमः। वयं कस्यचित् सप्तभुजस्य (7 भुजाः) तथा च अष्टभुजस्य (8 भुजाः) कृते तयोः आकृतीः आलिख्य अस्य अवेक्षणं कुर्वन्तु। एषा सङ्ख्या कस्यचित् त्रिभुजस्य (3 भुजाः) कृते का अस्ति ? अवधानं कुर्वन्तु यत् कस्यचित् बहुभुजस्य कस्माच्चित् शीर्षात् आलिखिताः विकर्णाः तं तावत्सु अव्यापिषु (non-overlap_ ping) (यौ मिथः न आवृणुतः) त्रिभुजेषु विभक्तीकुर्वन्ति यावती विकर्णानां सङ्ख्यातः एका अधिका भवति।

प्रश्नावली 12.4

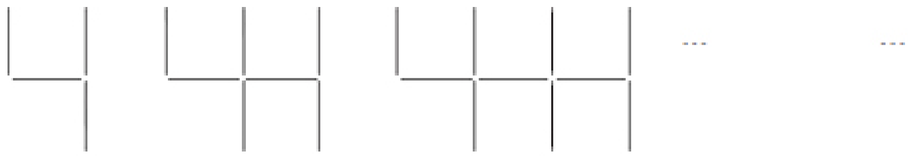
1. समानदीर्घतायुक्तैः रेखाखण्डैः निर्मितानि अङ्काय-प्रतिरूपाणि पश्यन्तु। भवन्तः रेखाखण्डैः निर्मितान् एतादृशान् अङ्कान् घटीषु अथवा परकलकेषु द्रष्टुं शक्नुवन्ति।

(a)



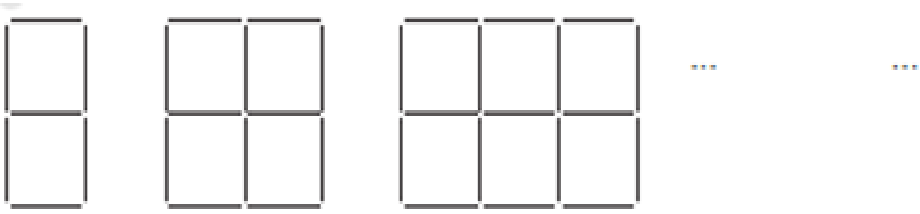
6 11 16 21 ... (5n + 1)...

(b)



4 7 10 13 ... (3n + 1)...

(c)



7 12 17 22 ... (5n + 2)...

यदि निर्मितानाम् अङ्कानां सङ्ख्या n इति स्वीकुर्मः तर्हि तदर्थम् अपेक्षित-रेखाखण्डानाम् (n) इति सङ्ख्यायाः दर्शयितारः बीजीय-व्यञ्जकः प्रत्येकं प्रतिरूपस्य दक्षिणतः लिखितः अस्ति।

इत्येवं प्रकारकान् 5,10,100 इति अङ्कान् निर्मातुं कति रेखाखण्डानाम् आवश्यकता भविष्यति ?

2. सङ्ख्याप्रतिरूपाणां निम्नलिखित-तालिकां पूरयितुं प्रदत्तानां बीजीय-व्यञ्जकानां प्रयोगं कुर्वन्तु ;

क्र.स.	पदम्										
	व्यञ्जकः	प्रथमः	द्वितीयः	तृतीयः	चतुर्थः	पञ्चमः		दशमः	....	शतमः	-
(i)	$2n - 1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n + 2$	5	8	11	14	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n + 1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n + 20$	27	34	41	48						
(v)	$n^2 + 1$	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

अस्माभिः का चर्चा विहिता ?

1. चरैः अचरैः च व्यञ्जकाः निर्मीयन्ते। व्यञ्जकान् निर्मातुं वयं चरान् अचरान् च आधारीकृत्य योगः, व्यवकलनम्, गुणनम् अथ च विभाजनम् इति सङ्क्रियाः कुर्मः । उदाहरणार्थम् $4xy + 7$ इति व्यञ्जकः x तथा च y इति चराभ्याम् एवञ्च 4 तथा च 7 इति अचराभ्यां निर्मितः अस्ति। 4इति अचरं तथा च x एवं च y इति चरौ गुणयित्वा $4xy$ इति निर्माय तस्मिन् 7 योजयित्वा $4xy + 7$ इति निर्मीयते।

2. व्यञ्जकाः पद-योजनेन निर्मिताः भवन्ति। पदानि संयोज्य व्यञ्जकः निर्मीयते। उदाहरणार्थम् $4xy$ एवञ्च 7 इत्यनयोः योजनेन $4xy + 7$ इति निर्मितः भवति।

3. किमपि पदं गुणनखण्डानाम् एकं गुणनफलं भवति। $4xy + 7$ इत्यस्मिन् व्यञ्जके $4xy$ इति पदम् x, y एवञ्च 4 इत्येतेषां गुणनखण्डानां गुणनफलम् अस्ति। चरयुक्ताः गुणनखण्डाः बीजीय-गुणनखण्डाः इति कथ्यन्ते।

4. पदस्य गुणाङ्कः तस्य सङ्ख्यात्मकः गुणनखण्डः भवति। कदाचित् पदस्य कोऽपि एकः गुणनखण्डः पदस्य शेषभागस्य –गुणाङ्कः कथ्यते।

5. एकपदेन अथवा एकाधिकपदैः निर्मितः व्यञ्जकः बहुपदम् इति नाम्ना उच्यते । विशिष्टरूपेण एकपदयुतः व्यञ्जकः एकपदी द्वाभ्यां पदाभ्यां युक्तः व्यञ्जकः द्विपदी तथा च त्रिभिः पदैः युक्तः व्यञ्जकः त्रिपदी इति कथ्यते।

6. तानि पदानि येषु बीजीय-गुणनखण्डाः एकसमानाः स्युः, समानपद-नाम्ना कथ्यन्ते। भिन्न-बीजीय-गुणनखण्डैः युक्तानि पदानि असमान-पदम् इति उच्यन्ते। अनेन प्रकारेण $4xy$ तथा च– $3xy$ इति समानपदे स्तः किन्तु $4xy$ एवञ्च $– 3x$ इति समानपदे न स्तः।

7. द्वयोः समानपदयोः योगः (अथवा अन्तरम्) एकम् अन्यं समानपदं भवति यस्य गुणाङ्कः तेषां समानपदानां गुणाङ्कानां योगेन (अथवा अन्तरेण) समानः भवति। अनेन प्रकारेण $8xy – 3xy = (8 – 3)\, xy$ अर्थात् $5xy$ इति।

8. यदा वयं द्वौ बीजीय-व्यञ्जकौ योजयामः तदा समानपदयोः योजनम् उपरि वर्णित-नियमानुसारं क्रियते। यानि पदानि समानानि न सन्ति तानि तथैव त्यज्यन्ते। अनेन प्रकारेण $4x^2 + 5x$ तथा च $2x + 3$ इत्यनयोः योगः $4x^2 + 7x + 3$ इति अस्ति। अत्र $5x$ एवञ्च $2x$ इति समानपदे संयोज्य $7x$ इति भवतः तथा च $4x^2$ एवञ्च 3 इति असमानपदे तथैव त्यज्येते।

9. कस्यचित् समीकरणस्य समाधाने अथ च सूत्रप्रयोगस्य स्थितौ अस्माकं कृते व्यञ्जकस्य मानज्ञानम् आवश्यकं भवति । बीजीय-व्यञ्जकस्य मानं तेषां चराणां मानेषु आश्रितं वर्तते यैः तद् निर्मितम् अस्ति। अनेन प्रकारेण $x = 5$ कृते $7x – 3$ इत्यस्य मानं 32 अस्ति यतो हि $7\,(5) – 3 = 35 – 3 = 32$ इति अस्ति।

10. गणिते बीजीय-व्यञ्जकान् प्रयुज्य नियमान् सूत्राणि च संक्षिप्तरूपेण व्यापकरूपेण च लिखामः।

    अनेन प्रकारेण आयतस्य क्षेत्रफलम् $= lb$ इति अस्ति, यत्र l इति आयतस्य दीर्घता तथा च b इति आयतस्य विस्तृतिः अस्ति।

कस्याश्चित् सङ्ख्यायाः (अथवा अनुक्रमः) प्रतिरूपस्य (n तमम्) व्यापकपदम् n मध्ये एकः व्यञ्जकः भवति। अनेन प्रकारेण 11, 21, 31, 41, . . . इत्येषां सङ्ख्याप्रतिरूपाणां n तमं पदम् (10n + 1) इति अस्ति।